Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 1
Prof. Dr. G. Wang — 22.10.2012
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Aufgabe 1: Sei für $\epsilon > 0$ beliebig. Konstruiere eine Folge (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\cdots$ von offenen Intervallen mit $\mathbb{Q} \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| < \epsilon$. Zeige, dass dann $\cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \neq \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen heißt *summierbar* mit Summe a, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede endliche Teilmenge $E \subset I$ mit $E_0 \subset E$ gilt $|a - \sum_{i\in E} a_i| < \epsilon$.

a). Beweise: $(a_i)_{i\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subset I$ gibt, so dass für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge $K \subset I$ gilt $|\sum_{i\in K} a_i| < \epsilon$.

b). Zeige, dass $(a_i)_{i\in I}$ genau dann summierbar ist, wenn $(|a_i|)_{i\in I}$ summierbar ist.

c). Beweise: Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ nicht-negativer reeller Zahlen ist genau dann summierbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\sum_{i\in E} a_i < c$ für jede endliche Teilmenge $E \subset I$.

d). Zeige, dass jede Teilfamilie $(a_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ einer summierbaren Familie $(a_i)_{i\in I}$ wieder summierbar ist.
Beweise weiterhin: Ist $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und für$J \subset I$ eine endliche Zerlegung $J = J_1 \cup \cdots J_s$ in paarweise disjunkte Teilmengen $J_1, \cdots, J_s \subset J$ gegeben, so gilt

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{i\in J_1 1} a_i + \cdots + \sum_{i\in J_s} a_i.$$

e). Ist $(a_i)_{i\in I}$ summierbar und es sei $J_k \subset J_{k+1} \subset I$ eine Folge mit $\cup_{k=1}^{\infty} J_k = I$. Dann gilt

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{k\in\infty} \sum_{j\in J_k} a_i.$$

f) Ist $(a_i)_{i\in I}$ summierbar. Dann sind nur abzählbar viele a_i von Null verschieden

g). Wie kann man definieren "Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlenheißt *summierbar* mit Summe ∞"?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 29.10 vor der Vorlesung**.